

Izbor iteracionog parametra (za dvostranu, stacionarnu)

$$Ax^* = b \Leftrightarrow Ax^* - b = 0$$

Rekurentnu formulu $x_{k+1} = G(x_k)$ možemo da izvedemo i ovako:

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{C}_{\text{matrica}} \underbrace{(Ax_k - b)}_{\text{jer ovo} \rightarrow 0 \text{ kad } \{x_k\} \rightarrow x^*}$$

Pretpostavimo $C = \tau \cdot I$, $\tau \in \mathbb{R}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Treba odrediti C , tj. τ tako da imamo najbržu konvergenciju.

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \tau I (Ax_k - b)$$

$$= x_k - \tau (Ax_k - b)$$

/ smanjimo indeks za 1

$$\Rightarrow x_k = x_{k-1} - \tau (Ax_{k-1} - b) \quad / - x^*$$

, gde x^* je tačno rešenje

$$x_k - x^* = x_{k-1} - x^* - \tau (Ax_{k-1} - b)$$

$$/ b = Ax^*$$

$$= x_{k-1} - x^* - \tau (Ax_{k-1} - Ax^*)$$

$$= \underline{x_{k-1} - x^*} - \tau A \underline{(x_{k-1} - x^*)}$$

$$= (I - \tau A) \cdot \underline{(x_{k-1} - x^*)}$$

voditi računa o redosledu:
matrica $\cdot$ kolona

$$= \dots (I - \tau A) \underline{(x_{k-2} - x^*)}$$

$$= (I - \tau A)^k \cdot (x_0 - x^*)$$

$$/ \| \cdot \|$$

$$\|x_k - x^*\|_2 \leq \| (I - \tau A)^k \|_2 \cdot \|x_0 - x^*\|$$

(*)

↑
Kosi-Svarc

↳ što je ovo manje, to je konvergencija brža

⇒ Želimo da odredimo τ tako da $\| (I - \tau A)^k \|_2$ bude što manje.

Uvešćemo neke dodatne pretpostavke:

Neka je A Hermiteova ($A^* = A$) i pozitivno definitna !

Oznake: $M = \max_i \lambda_i(A)$, $m = \min_i \lambda_i(A)$.

Važiće $0 < m \leq M$ jer:

$$(Av_i, v_i) = (\lambda_i v_i, v_i) = \lambda_i (v_i, v_i) > 0 \quad (\text{jer } A \text{ poz def.})$$

Pošto je A Hermiteova $\Rightarrow I - \tau A$ je Hermiteova jer
 $(I - \tau A)^* = I^* - \tau^* A^* = I - \tau A^* = I - \tau A$, $\tau \in \mathbb{R}$, $A = A^*$

Za Hermiteovu matricu A važi:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^2)} \quad (\text{jer } A^* = A)$$

$$= \sqrt{\max_i (\lambda_i(A))^2}$$

$$= \max_i |\lambda_i(A)| \quad (\text{sr})$$

/ pokazali već jer
 $A^k v = A^{k-1} A v = A^{k-1} \lambda v = \lambda^k v$

Pošto je $I - \tau A$ Hermiteova onda:

$$\|(I - \tau A)^k\|_2 = \max_i |\lambda_i((I - \tau A)^k)|$$

$$= \max_i |(\lambda_i(I - \tau A))^k|$$

Šta su sopstvene vrednosti od $I - \tau A$?

$$(I - \tau A)x = I \cdot x - \tau Ax$$

$$= x - \tau Ax$$

$$Ax = \lambda x$$

$$= x - \tau \lambda x$$

$$= (1 - \tau \lambda)x$$

$\Rightarrow$ Ako je λ sopstvena vrednost od A , onda je $1 - \tau \lambda$ sopstvena vrednost od $I - \tau A$.

$$\|I - \tau A\|_2 = \max_i |1 - \tau \lambda_i| \leq \max_{\lambda \in [m, M]} |1 - \tau \lambda|$$

$$(*) \Rightarrow \|x_k - x^*\|_2 \leq \underbrace{\max_{\lambda \in [m, M]} |1 - \tau \lambda|^k}_{\text{što je ovo manje, to je konvergencija brža}} \cdot \|x_0 - x^*\|_2$$

što je ovo manje, to je konvergencija brža

Došli smo do novog (ekvivalentnog) problema:

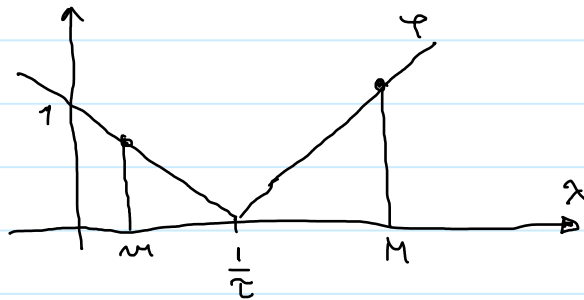
$$\min_{\tau \in \mathbb{R}} \max_{\lambda \in [m, M]} |1 - \tau \lambda|$$

rešavamo
 grafički

označimo sa φ

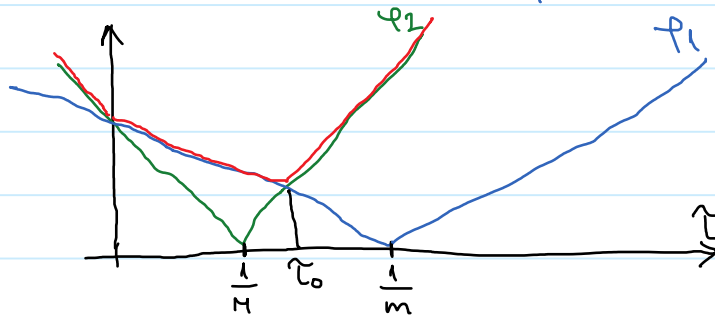
$$\varphi = |1 - \tau\lambda| = \begin{cases} 1 - \tau\lambda, & 1 - \tau\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{1}{\tau} \\ \tau\lambda - 1, & 1 - \tau\lambda < 0 \Rightarrow \lambda > \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{\tau}\right) = 0$$



max od $\varphi(\lambda)$ se
dostigne ili u m
ili u M

$$\Rightarrow \max_{\lambda \in [m, M]} \varphi(\lambda) = \max_{\lambda \in [m, M]} \underbrace{\{ |1 - \tau m| \}}_{\varphi_1}, \underbrace{\{ |1 - \tau M| \}}_{\varphi_2}$$



grafik za φ_2
je "straniji"
od φ_1 jer je
 $M \geq m > 0$

$\max \varphi$ je max ove 2 funkcije

Konačno, nama treba $\min_{\tau} \max_{\lambda \in [m, M]} \varphi(\lambda) \rightarrow \tau_0$

τ_0 je presečna tačka φ_1 i φ_2

Postoje 2 presečne tačke $\tau = 0$ i $\tau = \tau_0$

$$|1 - \tau m| = |1 - \tau M|$$

$$1 - \tau m = -1 + \tau M$$

$$2 = \tau m + \tau M \Rightarrow \tau = \tau_0 = \frac{2}{M+m}$$

Pre tome je $\varphi_1(\tau) < \varphi_2(\tau)$, $\tau < 0$, $\tau > \tau_0$
 $\varphi_1(\tau) > \varphi_2(\tau)$, $0 < \tau < \tau_0$

$$\Rightarrow \max \{ \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau) \} = \begin{cases} \varphi_2, & \tau < 0, \tau > \tau_0 \\ \varphi_1, & 0 < \tau < \tau_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \min_{\tau} \max \{ \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau) \} = \varphi_1(\tau_0) = \varphi_2(\tau_0)$$

$$\stackrel{(*)}{=} |1 - \tau_0 m| = \left| 1 - \frac{2}{M+m} \cdot m \right| = \left| \frac{M-m}{M+m} \right| = \frac{M-m}{M+m}$$

$M > m > 0$

Isto bi se dobilo da se kod (*) uzelo $|1 - \tau_0 M|$ umesto $|1 - \tau_0 m|$.

$\Rightarrow$ Optimalna vrednost za τ za koje iterativna metoda najbrže konvergira je $\tau = \tau_0 = \frac{2}{M+m}$, a odgovarajuća ocena brzine konvergencije je.

$$\|x_k - x^*\|_2 \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k \cdot \|x_0 - x^*\|_2.$$

Kako utiče loše uslovljena matrica na konvergenciju?

$$\|A\|_2 = \max |\lambda_i| = M \quad \text{iz (9)}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \max \frac{1}{|\lambda_i|} = \frac{1}{\min |\lambda_i|} = \frac{1}{m}$$

$$= \text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{M}{m}$$

$$\Rightarrow \|x_k - x^*\|_2 \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k \cdot \|x_0 - x^*\|_2$$

$$= \left(\frac{\frac{M}{m} - 1}{\frac{M}{m} + 1}\right)^k \cdot \|x_0 - x^*\|_2$$

$$= \left(\frac{\text{cond}(A) - 1}{\text{cond}(A) + 1}\right)^k \cdot \|x_0 - x^*\|_2$$

ako je $\text{cond}(A)$ veliko, onda je ovaj
količnik skoro 1 pa sporo konvergira jer
nikako da se odmaknemo od x_0

Keiterijm zadržavanja

$$\begin{aligned} \|x_k - x^*\|_2 &= \|G(x_{k-1}) - G(x^*)\|_2 \leq q \cdot \|x_{k-1} - x^*\|_2 \\ &= q \|G(x_{k-2}) - G(x^*)\|_2 \leq q^2 \|x_{k-2} - x^*\|_2 \end{aligned}$$

= ...

$$\leq q^k \|x_0 - x^*\|_2$$

$$\|x_k - x^*\|_2 \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k \cdot \|x_0 - x^*\|_2$$

$$\Rightarrow q = \frac{M-m}{M+m}$$

koef. kontrakcije koji
mora biti < 1